

Leçon 229: Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

Références: Ramis Deschamps-Obloux 3, Rombaldi (Éléments d'analyse réelle), Rudin (Analyse réelle et complexe), Courdon, Delmas (Modèles stochastiques)

I - Fonctions monotones

- 1) Définitions et premières propriétés
- 2) Régularité des fonctions monotones
- 3) Applications

II - Fonctions convexes

- 1) Définition générale
- 2) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$
- 3) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$

III - Exemples et applications

- 1) Inégalités
- 2) Étude de la fonction Γ
- 3) Processus de Galton-Watson

DEV 1: Fonction Γ et Bohr-Mollerup

DEV 2: Processus de Galton-Watson

Leçon 229 : Fonctions monotones, Fonctions convexes

Exemples et applications

I - Fonctions monotones

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Définitions et premières propriétés [PDD]

DEF 1: f est dite croissante (resp. strictement croissante) lorsque
 $\forall (x, y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
(resp. $\forall (x, y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)

f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) lorsque - f est croissante (resp. strictement croissante).

f est dite monotone lorsque f est croissante ou décroissante (resp. strictement).

EX 2: $x \mapsto ax+b$ est monotone: croissante si $a \geq 0$, décroissante sinon.

PROP 3: Une application monotone f est injective si et seulement si elle est strictement monotone; elle induit alors une bijection de D sur $f(D)$ dont la bijection réciproque est strictement monotone.

PROP 4: Si f est croissante et $\lambda \geq 0$, λf est croissante.

• Si f et g sont croissantes, $f+g$ est croissante.

• Si f et g sont croissantes et positives, fg est croissante.

• Si f et g sont de même monotonie, f/g est croissante.

• Si f et g sont de monotonie inverse, f/g est décroissante.

THM 5: (limite monotone) Si f est monotone, $a \in \mathbb{R}$ tel que a soit adhérent à $D \cap]a, +\infty[$ (resp. $D \cap]-\infty, a[$). Alors, f admet une limite, finie ou infinie, à droite (resp. à gauche) au point a .

COR 6: Si f est croissante et $a \in D \cap]a, +\infty[$. Alors, f admet une limite finie à droite, au point a , si et seulement si f est majorée sur $D \cap]a, +\infty[$.

COR 7: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone et $a \in I, a \neq \sup(I)$. Alors, f admet une limite à droite (finie) $f(a^+)$ et si $a \neq \inf(I)$, f admet une limite à gauche finie $f(a^-)$.

2) Régularité des fonctions monotones [PDD]

THM 8: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, l'ensemble E des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

EX 9: Soit X une variable aléatoire réelle. Alors sa fonction de répartition F_X a un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.

THM 10: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone. Alors f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

COR 11: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J .

THM 12: Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, f un homéomorphisme de I sur J . Alors, f est strictement monotone.

THM 13: Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur I .

• f est constante si et seulement si: $\forall t \in I, f'(t) = 0$.

• f est croissante si et seulement si: $\forall t \in I, f'(t) \geq 0$.

• f est décroissante si et seulement si: $\forall t \in I, f'(t) \leq 0$.

THM 14: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue dérivable sur I . Alors f est strictement croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et $X = \{t \in I / f'(t) = 0\}$ est d'intérieur vide.

EX 15: $t \mapsto t^3$ montre que f peut être strictement croissante sans que $X = \emptyset$.

THM 16: (Lebesgue, AD115) Toute fonction monotone sur un intervalle est dérivable presque partout.

3) Applications [GOV]

THM 17: • Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers f continue sur I , alors la convergence est uniforme.

DEF 18: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est à variations bornées sur I et on note $f \in \mathcal{VB}(I)$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x_0 < \dots < x_n \in I$,
 $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$. On note $v(f)$ la plus petite constante

EX 19: Toute fonction croissante bornée est à variations bornées. La fonction $f: x \in \mathbb{R} \mapsto x \cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$ n'est pas à variations bornées.

PROP 20: Soit $a \in I$. Alors $f \in VB(I, x) \iff f|_{[a, \infty[} \in VB(I, x)$ et $f|_{]a, a+1]} \in VB(I, x)$ et donc on a:

$$v(f) = \#f|_{[a, \infty[} + v(f|_{]a, a+1]})$$

PROP 21: $VB(I) = \{g-h \mid g, h \text{ croissantes bornées}\}$

COR 22: Si $f \in VB(I)$, alors f est dérivable presque partout.

II - Fonctions convexes

1) Définition générale [RAT]

Soit E un convexe d'un espace vectoriel normé de dimension finie, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

DEF 23: On dit que f est convexe lorsque:

$$\forall (x, y) \in E, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

f est strictement convexe lorsque:

$$\forall (x, y) \in E, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

f est concave (st concave) lorsque $-f$ est convexe (st convexe)

DEF 24: L'épigraphie de f est la partie de $E \times \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{E}(f) = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$

THM 25: f est convexe si et seulement si $\mathcal{E}(f)$ est convexe.

EX 26: des applications linéaires sont à la fois convexes et concaves.

2) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ [RDO]

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle

THM 27: f convexe $\iff \forall x, y, z \in I$

$$x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$\iff \forall a \in I, t \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

RE 28: On peut illustrer graphiquement ces propriétés (voir Annexes)

PROP 29: Si f est convexe sur I , pour tout $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ et tout système $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, on a:

$$f(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x_i)$$

THM 30: Si f est convexe sur I , alors f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point $a \in I$ et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. De plus, f'_g et f'_d sont croissantes sur I .

THM 31: Si I est ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, alors f est convexe si et seulement si f est continue sur I et admet sur I une dérivée à droite croissante.

COR 32: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I ouvert. f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

EX 33: $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

THM 34: Soit f dérivable sur I ouvert. LASSÉ:

- f convexe sur I
- f' est croissante sur I
- La courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes

THM 35: Soit f convexe dérivable en $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$. Alors f admet un minimum global en a .

THM 36: Si f est convexe sur I et admet un minimum local en $a \in I$, ce minimum est global.

3) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ [RDO]

Soit E une partie convexe sur $\mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

PROP 37: Si f est différentiable sur E convexe ouvert. Alors, f est convexe si et seulement si $\forall (a, x) \in E^2$,

$$f(x) \geq f(a) + df(a)(x-a)$$

PROP 38: Si f est deux fois différentiable sur E convexe. Alors, f est convexe si et seulement si pour tout $a \in E$

$$d^2 f(a)(h, h) \geq 0$$

EX 39: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ est convexe.

III - Exemples et applications

1) Inégalité [RDO]

PROP 40: Par convexité (resp. concavité) de $\exp$ (de $\ln$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x \text{ et } \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$$

RAT

THM 41 (Jensen) Soit (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé. Soit f dans $L^1(\mu)$ à valeurs réelles et telle que pour tout $x \in \Omega$, $a \leq f(x) \leq b$. Si φ est convexe sur $[a, b]$, on a :

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu$$

Ex 42 : On a l'inégalité arithmético-géométrique : pour tous

$$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n, \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

LEMME 43 (Young) Soient $(p, q) \in \mathbb{R}_+^*$ et $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

THM 44 : Soit (X, μ) un espace mesuré, $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient f, g mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. On a :

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{Hölder})$$

$$\text{et } \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Minkowski})$$

Cor 45 : L'espace $(L^p(X, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé. On peut montrer qu'il est complet.

2) Etude de la fonction Γ (Boa) [R.D.]

DEF 46 : On définit pour tout $x > 0$, la fonction Γ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

DEV 1a)

PROP 47 : Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Γ et $\ln(\Gamma)$ sont convexes sur $]0, +\infty[$

$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

PROP 48 : $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$ DEV 1b)

THM 49 (Bohr-Mollerup) Soit f une fonction satisfaisant les propriétés suivantes :

1) $f(x+1) = xf(x)$

2) le domaine de définition de f contient $\mathbb{R}_+^*$ et f est log-convexe (i.e. $\ln(f)$ est convexe)

3) $f(1) = 1$.

Alors f coïncide avec la fonction Γ sur son domaine de définition.

3) Processus de Galton-Watson (DELTA 5)

DEF 50 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction $G_X : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$.

DEF 51 : Soit $(\xi_i^n)_{i \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de carré intégrable. On note, $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = P(\xi_i^n = k)$, $m = E[\xi_i^n]$, $\sigma^2 = \text{Var}(\xi_i^n)$ et $G(s) = G_{\xi_i^n}(s)$, $s \in [0, 1]$.

On pose $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n$. $(Z_n)_{n \geq 0}$ est appelé processus (de branchement) de Galton-Watson.

But : On s'intéresse à la probabilité d'extinction $\eta = P\left(\bigcup_{n \geq 1} (Z_n = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0)$

DEV 2

LEMME 52 : 1) G est bien définie sur $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $[0, 1]$.

2) G est strictement croissante sur $]0, 1[$

3) G est strictement convexe $\Rightarrow p_0 + p_1 = 1$

LEMME 53 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(s) = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_n(s)$ où on a noté $G_n = G_{Z_n}$. De plus, $E[Z_n] = m^n$.

THM 54 : On suppose $p_0 \in]0, 1[$.

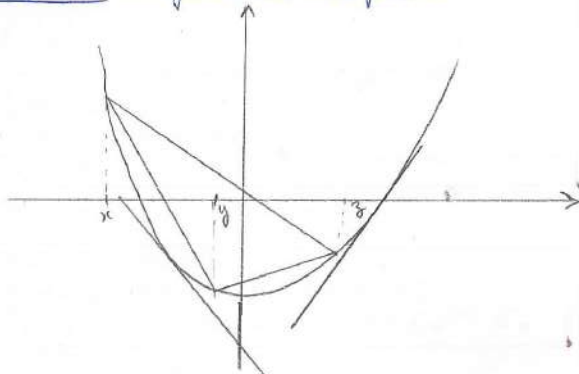
1) η est la plus petite solution positive de l'équation $G(s) = s$

2) Si $m \leq 1$, $\eta = 1$

3) Si $m > 1$, $\eta \in]0, 1[$.

REMARQUE : On donne les représentations graphiques des différents cas en Annexe 2.

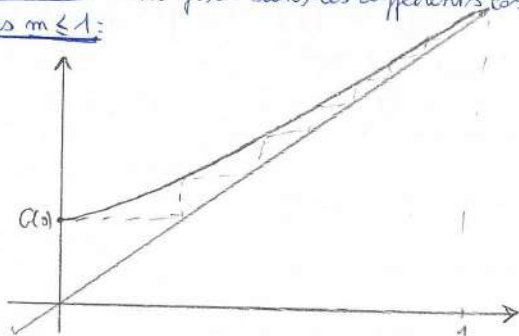
Annexe 1: Inégalité des trois pentes



On constate également sur ce graphique que la courbe d'une fonction convexe est située au-dessus de toutes ses tangentes, en dessous de toutes ses cordes.

Annexe 2: Point fixe dans les différents cas:

- Cas $m \leq 1$:



Cas $m > 1$:

